

УДК 621-752

**Динамические реакции в оценке состояния виброзащитных систем\***

Ермошенко Ю.В., Большаков Р.С., Каимов Е.В.

Предлагается метод определения динамических реакций в механических колебательных системах. Показано, что динамические реакции между массоинерционными и соединительными элементами в виде пружин (и демпферов), а также в контактах с опорными поверхностями, определяются на основе получения приведенных жесткостей. Такие параметры формируются при преобразовании структурных моделей исходных расчетных схем. В основе развиваемого подхода лежат структурные представления механических колебательных систем. Последние трансформируются в адекватные структурные схемы систем автоматического управления. Показано, что при выделении объекта, для которого рассчитывается реакция связи, в виде интегрирующего звена второго порядка, что в виброзащитных системах, к примеру, соответствует объекту защиты, обратная связь по физическому смыслу соответствует динамической реакции. Приведены примеры. Разработана методика проведения необходимых преобразований и получения аналитических соотношений для определения динамических реакций связи.

*Ключевые слова:* метод определения динамических реакций при вибрационных воздействиях, виброзащитные системы, передаточные функции.

**Dynamic response in the vibration-protection system assessment**

Ermoshenko Y.V., Bolshakov R.S., Kaimov E.V.

The paper considers dynamic response identification method in mechanical vibration systems. Dynamic reactions between inertial-mass and connecting elements (springs and dampers) as well as reactions in contacts with bearing surfaces are determined on the basis of obtaining reduced rigidities. These parameters are determined during the transformation of structural models of initial design schemes. The approach under discussion is based on structural concept of mechanical vibration systems. They are transformed into corresponding structural schemes of automatic control systems. When you select an object for the constraint force calculation as the second-order integrator which corresponds to the object to protect in vibration-proof systems, for example, the feedback physically corresponds to the dynamic response. The examples are given. The technique for performing required changes and obtaining analytical relations for dynamic connection response determination is developed.

*Keywords:* method of definition of dynamic reactions at vibration influences, vibroprotection systems, transfer functions.

**Введение**

В задачах динамики машин вопросам ограничения параметров вибрационных процессов, поиска и разработки способов и средств управления динамическим состоянием технических объектов уделяется большое внимание, что нашло отражение в работах отечественных и зарубежных специалистов [1 ÷ 3]. Теоретические подходы расчетов и

оценки возможностей виброзащитных систем основаны на представлении объекта защиты физической моделью в виде механической колебательной системы с одной или несколькими степенями свободы с последующим составлением дифференциальных уравнений определенного вида, определяющих особенности решения поставленной задачи и параметры динамического состояния [4].

\* Исследования выполнены по гранту в рамках федеральной целевой программы «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2012 – 2013 г.г. (мероприятие 1.3.2. – естественные науки) № 14.132.21.1362

Большинство задач виброзащиты и виброизоляции технических объектов решается в предположении достаточности представлений о реакции рассматриваемой системы на типовые периодические воздействия [5].

Вместе с тем, повышение требований к обеспечению надежности и безопасности современных машин, представляющих собой сложные технические комплексы, включающие в свой состав системы с элементами различной физической природы, предопределяют интерес к развитию в оценке динамических свойств подходов, использующих возможности аналитического аппарата теории автоматического управления [6 ÷ 8]. Представление механической колебательной системы в виде эквивалентной в динамическом отношении структурной схемы системы автоматического управления позволяет достаточно просто решать задачи динамического синтеза виброзащитных систем и расширения числа параметров, контроль за которыми имеет значение для обеспечения надежности работы машин.

В предлагаемой статье рассматриваются методологические основы подхода, позволяющего введение в число контролируемых параметров динамические реакции, возникающие в виброзащитных системах при действии внешних периодических сил.

### 1. Общие положения. Постановка задачи исследования

В простейших вариантах построения виброзащитных систем объект защиты соединяется с окружающей средой, создающей силовые и кинематические возмущения с помощью устройств и элементов, которые сами по себе не содержат в своем составе инерционных элементов. То есть соединительные устройства представляют собой идеализированные пружины и демпфера. В таких случаях виброизолирующее устройство между объектом защиты и основанием или опорой

имеет динамические реакции, которые равны между собой, что соответствует представлениям о том, что «действие равно противодействию» [1]. Если соединение между объектом защиты и опорой является более сложным и представляет собой, к примеру, механическую цепь, включающую инерционные элементы, то виброизолирующее устройство уже не будет обладать симметрией динамических взаимодействий. Динамические реакции, вызванные внешними возмущениями, в общем случае, будут различными, что зависит от мест приложения сил, структуры системы, числа и вида связей. Методические основы определения динамических реакций могут быть рассмотрены на примере механической колебательной системы с двумя степенями свободы (Рис. 1а, б, в), совершающей малые колебания относительно положения статического равновесия.

Структурные схемы построены на основе математической модели в виде системы двух линейных дифференциальных уравнений движения:

$$m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = Q_1(t) + k_1 z_1(t) \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + k_3)y_2 - k_2 y_1 = Q_2(t) + k_3 z_2(t). \quad (2)$$

Для построения структурных схем использовалось преобразование Лапласа ( $p = j\omega$  – комплексная переменная).

Принимается, что система является линейной, силы трения – пренебрежимо малы;  $m_2$  – объект защиты;  $m_1$  – масса виброизолирующего устройства;  $k_1, k_2, k_3$  – упругие элементы. Окружающая среда такова, что система имеет две опоры (или контакты) с основаниями (I и II). На систему действуют силовые факторы в виде гармонических сил  $Q_1(t)$  и  $Q_2(t)$ . Через  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  обозначены известные (гармонические) движения основания.

Структурная схема на рис.1б отражает детализированные представления о динамических взаимодействиях в системе на уровне

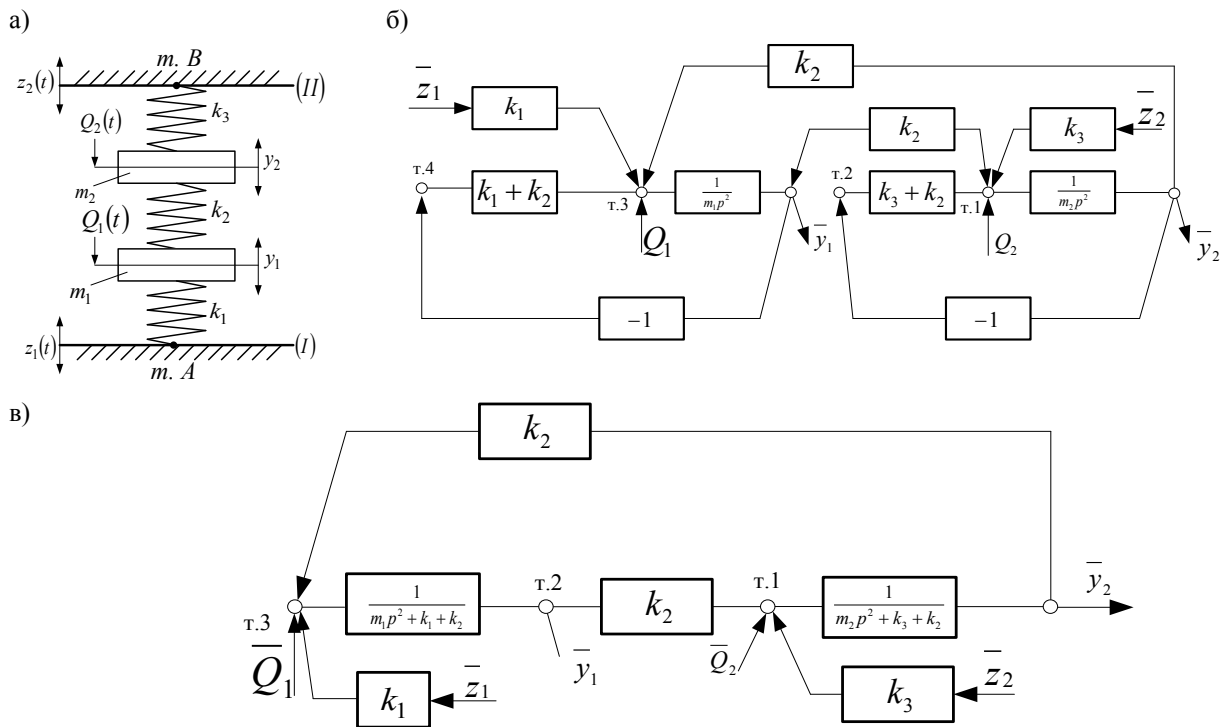


Рис.1. Расчетная схема (а) виброзащитной системы с инерционным элементом ( $m_2$ ): детализированная (б) и обобщенная (в) структурные схемы.

поэлементного рассмотрения. Точки 1, 2, 3, 4 являются характерными и используются в структурных преобразованиях, позволяющих установить связи между внешними воздействиями (или входными сигналами) и характеристиками динамического состояния (смещения, скорости, реакции) или выходными сигналами. Структурная схема на рис. 1в является результатом некоторой «сборки» исходной математической модели в виде системы из двух дифференциальных уравнений, в которых выделены два блока, называемых парциальными системами. Вариант структуры на рис. 1в отражает основные особенности динамической связи между парциальными системами, в данном случае они носят упругий характер. При выборе других систем координат связи между парциальными системами будут носить иной характер [5]. Будем полагать, что в рассматриваемых случаях действует только одно из возмущений, а остальные принимаются равными нулю. Совместное действие нескольких возмущений, например, двух, решается на основе принципа суперпозиции [1, 3].

Задача исследования заключается в разработке методики определения динамических реакций в т. т. А, В, соответственно опорных поверхностей I и II (Рис. 1а).

## II. Определение динамических реакций в виброзащитной системе

Полагаем, что  $m_2$  является объектом защиты, а система элементов  $k_1, k_2, k_3, m_1$  – представляет собой виброзащитное устройство (ВЗУ), которое формирует динамические реакции на опорных поверхностях, а также на массоинерционных элементах  $m_2$  и  $m_1$ , то есть динамических реакций в т. т. А и В (рис. 1а) и динамических реакций в т. т. 1, 3 (рис. 1б).

Примем, что  $Q_2 \neq 0$ , а  $Q_1 = 0$ ,  $z_1 = 0$  и  $z_2 = 0$ . Тогда уравнения (1) и (2) примут вид:

$$m_1 \ddot{y}_1 + (k_1 + k_2) \cdot y_1 - k_2 \bar{y}_2 = 0 \quad (3)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + (k_2 + k_3) y_2 - k_2 y_1 = Q_2. \quad (4)$$

После применения преобразований Лапласа из (3) можно найти, что

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 \cdot \frac{k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2}. \quad (5)$$

После подстановки (5) в (4) и разрешения уравнения относительно  $m_2 p^2 \cdot \bar{y}_2$ , получим уравнение кинестатики (соответствующее принципу Даламбера [1]), из которого следует, что динамическая реакция на массе  $m_2$  (или реакция связи) определяется:

$$\bar{R}_{m_2} = \bar{y}_2 \cdot \left[ k_3 + \frac{(m_1 p^2 + k_1) \cdot k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} \right]. \quad (6)$$

Система уравнений (3), (4) дает возможность найти передаточные функции системы:

$$W_1(p) = \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_2} = \frac{k_2}{A_0}, \quad (7)$$

$$W_2(p) = \frac{\bar{y}_2}{\bar{Q}_2} = \frac{m_1 p^2 + k_1 + k_2}{A_0}, \quad (8)$$

$A_0 = (m_1 p^2 + k_1 + k_2) \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3) - k_2^2$  (9) является характеристическим уравнением.

Полагая, что  $\bar{y}_2 = W_2(p) \cdot \bar{Q}_2$ , как это следует из (8), получим выражение для определения динамической реакции на объекте защиты  $m_2$ :

$$\bar{R}_{m_2} = \left[ k_3 + \frac{(m_1 p^2 + k_1) \cdot k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} \right] \cdot \frac{m_1 p^2 + k_1 + k_2}{A_0} \cdot \bar{Q}_2. \quad (10)$$

Из (10) следует, что динамическая реакция  $\bar{R}_{m_2}$  имеет две компоненты. Одна из них связана с упругим элементом жесткостью  $k_3$  и составляет:

$$\left( \bar{R}_{m_2} \right)' = \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0} \cdot \bar{Q}_2, \quad (11)$$

что соответствует динамической реакции в т. В на опорной поверхности II (рис. 1а). Вторая компонента (10):

$$\left( \bar{R}_{m_2} \right)'' = \frac{(m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0} \cdot \bar{Q}_2 \quad (12)$$

является динамической реакцией на объекте защиты без учета действия пружины  $k_3$ . Таким образом, получим, что:

$$\bar{R}_B = \left( \bar{R}_{m_2} \right)'' = \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0}. \quad (13)$$

Полная динамическая реакция на объекте защиты определяется суммой двух динамических реакций:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{m_2} &= \bar{R}_B + \left( \bar{R}_{m_2} \right)' = \\ &= \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + (m_1 p^2 + k_1) \cdot k_2}{A_0} \cdot \bar{Q}_2. \end{aligned} \quad (14)$$

При отсутствии пружины  $k_3$  схема упрощается, контакт с опорной поверхностью II (рис. 1а) нарушается. Тогда  $\bar{R}_{m_2} = \left( \bar{R}_{m_2} \right)''$ .

Используя (7), (8) можно найти передаточные функции для динамических реакций:

$$W_B(p) = \frac{\bar{R}_B}{\bar{Q}_2} = \frac{\left( \bar{R}_{m_2} \right)'}{\bar{Q}_2} = \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_{m_2} &= \frac{\bar{R}_{m_2}}{\bar{Q}_2} = \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + (m_1 p^2 + k_1) \cdot k_2}{A_0} = \\ &= \frac{(m_1 p^2 + k_1) \cdot (k_2 + k_3) + k_2 \cdot k_3}{A_0}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\left( \bar{W}_{m_2} \right)' = \frac{\left( \bar{R}_{m_2} \right)''}{\bar{Q}_2} = \frac{k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1)}{A_0}. \quad (17)$$

Из анализа (15) ÷ (17) можно сделать вывод, что динамические реакции будут иметь максимальные значения в резонансных режимах, вызванных действием внешней силы  $Q_2$ . Вместе с тем, на амплитудно-частотных характеристиках будут наблюдаться режимы, при которых отношение  $\bar{R}/\bar{Q}_2$  будет иметь нулевые значения. Отметим, что такие частоты определяются значениями:

1. для динамической реакции  $R_B$ :

$$\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m_1} \quad (18)$$

2. для полной динамической реакции на элементе  $m_2$ :

$$\omega^2 = \frac{k_2 \cdot k_3 + k_1 \cdot (k_2 + k_3)}{m_1 p^2 \cdot (k_2 + k_3)} \quad (19)$$

3. для динамической реакции на элементе  $m_2$  без учета действия пружины  $k_3$  (или  $k_3 = 0$ ):

$$\omega^2 = \frac{k_1}{m_1}. \quad (20)$$

Рассмотренные режимы связаны с динамическими реакциями, поэтому также режимы могут отличаться от известных режимов динамического гашения колебаний в механи-

ческих системах [1, 3]. В частности, режим «зануления  $R_B$ » (то есть  $k_3 \neq 0$ ) совпадает с режимом динамического гашения по координате  $y_2$  действия гармонического силового возмущения  $Q_2$ . В этом случае масса  $m_2$  становится неподвижной, поэтому и реакция с опорной поверхностью II (точка B) будет иметь нулевое значение, хотя  $k_3 \neq 0$ .

Что касается режимов, определяемых выражениями (19), (20), то они соответствуют условиям «зануления» динамических реакций, при этом в точках контакта остаются статические компоненты полных реакций, которые формируются статическими силами, определяющими положение статического равновесия. Координаты движения системы  $y_1$  и  $y_2$  при выполнении условий (19), (20) могут иметь и ненулевые значения.

### III. Особенности динамических взаимодействий с опорной поверхностью I (рис. 1а)

Используя уравнения (3), (4), которые при преобразованиях Лапласа превращаются в алгебраические, можно ввести соотношение:

$$\bar{y}_2 = \frac{\bar{Q}_2 + k_2 \bar{y}_1}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}, \quad (21)$$

что после подстановок и преобразований позволяет получить выражение для динамической реакции  $\bar{R}_{m_1}$ , которая формируется от действия внешней силы  $\bar{Q}_2$  на массоинерционном элементе с массой  $m_1$ . Такой элемент ( $m_1 \neq 0$ ) отражает инерционные свойства вибрационного устройства. Таким образом:

$$\bar{R}_{m_1} = \left[ k_1 + \frac{k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} \right] \cdot \bar{y}_1. \quad (22)$$

Динамическая реакция  $\bar{R}_{m_1}$  имеет также две компоненты  $\bar{R}_{m_1} = (\bar{R}_{m_1})' + (\bar{R}_{m_1})''$ , которые соответственно определяются:

$$(\bar{R}_{m_1})' = R_A = k_1 \bar{y}_1, \quad (23)$$

$$(\bar{R}_{m_2})'' = \frac{k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{(m_2 p^2 + k_2 + k_3)} \cdot \bar{y}_1. \quad (24)$$

Принимая, что  $\bar{y}_1 = \bar{W}_1 \cdot \bar{Q}_2 = \frac{k_2 \cdot \bar{Q}_2}{A_0}$ , как

это следует из выражения (7), запишем:

$$\bar{R}_A = \frac{k_1 \cdot k_2}{A_0} \cdot \bar{Q}_2 \quad (25)$$

$$(\bar{R}_{m_2})'' = \frac{k_2^2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{A_0 \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3)} \cdot \bar{Q}_2. \quad (26)$$

Полная динамическая реакция на инерционном элементе ВЗУ имеет вид:

$$\bar{R}_{m_1} = \left[ \frac{k_1 \cdot k_2}{A_0} + \frac{k_2^2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{A_0 \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3)} \right] \cdot \bar{Q}_2. \quad (27)$$

Из соответствия (13) и (25) можно отметить, что реакции ВЗУ на опорных поверхностях (I) и (II) (рис. 1а) будут различными, что совпадает с оценкой свойств ВЗУ с инерционными элементами [1, 3].

Выражения для амплитудно-частотных характеристик динамической реакции  $\bar{R}_{m_1}$  по входному возмущению  $\bar{Q}_2$  имеют вид:

$$W_{m_1}^{(p)} = \frac{\bar{R}_{m_1}}{\bar{Q}_2} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3) + k_2^2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{A_0 \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3)}, \quad (28)$$

$$(W_{m_1}(p))' = \frac{(R_{m_1})'}{\bar{Q}_2} = \frac{\bar{R}_A}{\bar{Q}_2} = \frac{k_1 \cdot k_2}{A_0} \quad (29)$$

$$(W_{m_1}(p))'' = \frac{(R_{m_1})''}{\bar{Q}_2} = \frac{k_2^2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{A_0 \cdot (m_2 p^2 + k_2 + k_3)} \quad (30)$$

Отметим, что реакции в системе (рис. 1а) отличаются большим разнообразием. Например, реакция в т. А не принимает нулевых значений. Из (28) и (30) следует, что возможны частоты, на которых могут наблюдаться режимы «зануления» реакций:

1. для полной динамической реакции на элементе  $m_1$ :

$$\omega^2 = \frac{k_2 \cdot k_3 + k_1 \cdot (k_2 + k_3)}{m_2 \cdot (k_1 + k_2)}, \quad (31)$$

2. для массоинерционного элемента  $m_1$ , взаимодействующего с объектом  $m_2$  через пружину  $k_2$ :

$$\omega^2 = \frac{k_3}{m_2}. \quad (32)$$

Особенности динамических реакций, рассматриваемых на инерционном элементе ВЗУ ( $m_1$ ) заключаются в том, что амплитудно-частотные характеристики, определяемые (28) и (30) имеют экстремальные значения не только на частотах собственных колебаний, определяемых из частотного уравнения  $A_0$ , но и на парциальной частоте объекта защиты  $m_2$ . Такая частота может быть найдена из выражения:

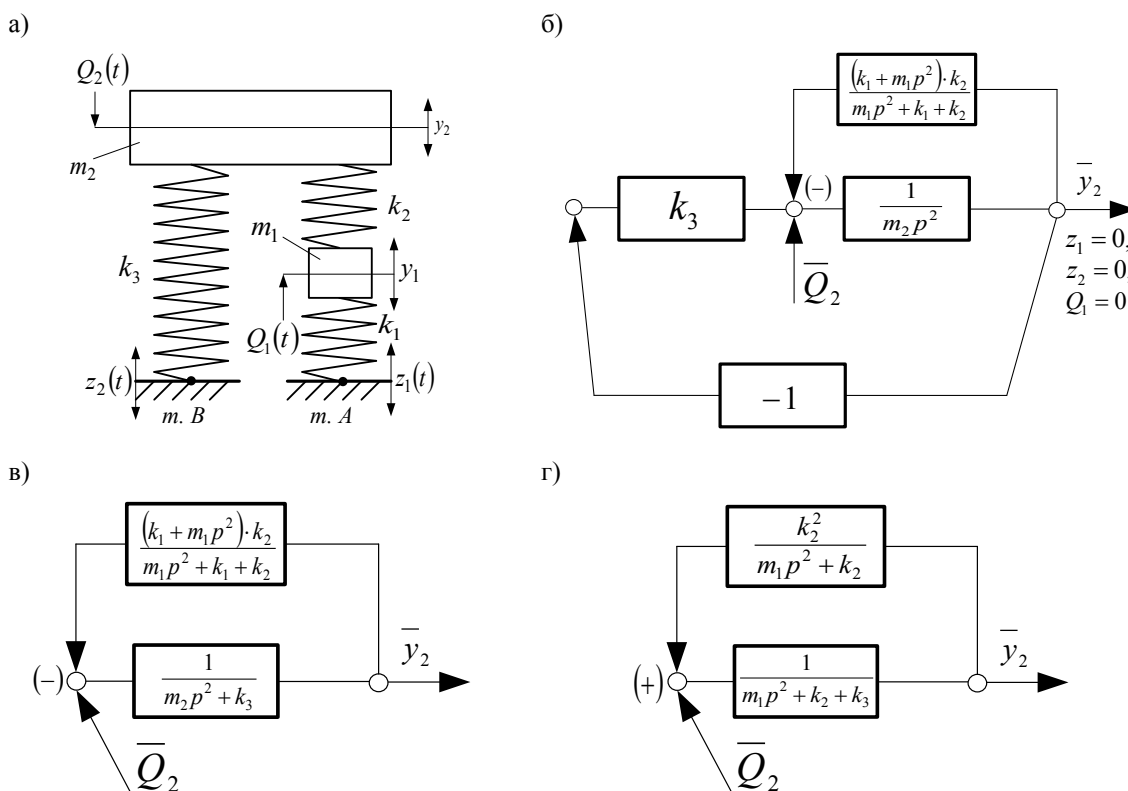
$$\omega^2 = \frac{k_2 + k_3}{m_2}. \quad (33)$$

Отметим в качестве общего свойства, что при параметрах системы, когда  $k_1 = k_2 = k_3 = k$  и  $m_1 = m_2 = m$ , система приобретает частные свойства, требующие отдельного рассмотрения.

#### IV. Структурные подходы в определении динамических реакций

Преобразуем расчетную схему, приведенную на рис. 1а к виду, как показано на рис. 2а. Для построения структурных схем на рис. 2б, в, г сделаны преобразования структурных схем на рис. 1б и рис. 1в.

Наличие опорных поверхностей I и II, показанных на рис. 1а, введено для получения более полной конфигурации исходной расчетной схемы, что, в частности, отражается через наличие упругого элемента  $k_3$ . В дальнейших расчетах  $k_3$  может быть приравнен к нулю без потери общности выводов. На рис.2а показано, что исходная расчетная схема может быть преобразована к виду, когда объект защиты опирается на два упругих элемента. Один из них представлен упругим элементом  $k_3$ , а другой – сложным упругим элементом, состоящим из двух пружин  $k_1$  и  $k_2$ , а также промежуточной массы  $m_1$ . Такое



**Рис. 2.** Расчетная схема (а) с выделением механической цепи  $k_1, k_2, m_1$ ; структурная схема (б) дополнительной отрицательной обратной связью и выделением парциальной системы  $m_2, k_3$ ; структурная схема с выделением положительной (г) обратной связи и парциальной системой  $m_2, k_2, k_3$ .

представление виброзащитной системы имеет свои преимущества, связанные с возможностями прямого использования методов теории цепей для построения комплексных сопротивлений или приведенной жесткости [8]. В этом плане показательна структурная схема на рис. 2б, на котором выделен объект защиты вместе с упругим элементом  $k_3$ , образующим парциальную систему частного вида. В этом случае упруго-инерционная структура оставшейся части механической системы может быть интерпретирована как положительная обратная связь для элемента с передаточной функцией  $\frac{1}{m_2 p^2}$ , то есть объекта защиты,

что можно в физическом смысле сопоставить с некоторой пружиной, имеющей динамическую жесткость  $k_{np} = \frac{(k_1 + m_1 p^2) \cdot k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2}$ . При

этом пружина с динамической жесткостью будет работать в параллельном соединении с пружиной с постоянной жесткостью  $k_3$ , но эта пружина будет отображаться уже отрицательной обратной связью. Выбор знака обратной связи может быть соотнесен с детализацией представлений о прямых и обратных связях, как показано на рис. 1б, в.

Из структурных схем рис. 2в и рис. 2г следует, что структурная схема на рис. 2б может быть свернута так, чтобы основой структуры стала парциальная система с передаточной

функцией  $\frac{1}{m_2 p^2 + k_3}$ , тогда в схеме остается

только один упругий элемент (рис. 2в). В свою очередь, парциальная система может также включать и упругий элемент  $k_2$ , тогда структурная схема на рис. 2г будет иметь положительную обратную связь, а ее передаточная функция упростится и примет вид

$\frac{k_2^2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2}$ . Приведенное отражает отно-

сительность понятий о знаках обратной связи в системе, что зависит от выбора вида парци-

альной системы и форм их упрощения до передаточной функции объекта защиты. Очевидно, что динамическая реакция на объекте защиты  $R_{m_2}(p)$  может быть найдена по структурной схеме на рис. 2б. В этом случае необходимо сформировать цепь обратной связи:

$$W_{OC}(p) = k_3 + \frac{(m_1 p^2 + k_1) \cdot k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} \quad (34)$$

Что касается динамических реакций для других элементов и ситуаций, то это зависит от соответствующего выбора места динамических контактов.

Для определения динамической реакции в т. В можно воспользоваться структурной схемой на рис. 2б. Учитывая то обстоятельство, что имеется элемент с передаточной функцией  $W(p) = k_3$ , приведенная динамическая жесткость цепи обратной связи  $k_3$  (рис. 2б), определится выражением:

$$k_{np} = \frac{(m_1 p^2 + k_1) \cdot k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} \quad (35)$$

Кроме того, обратная связь является отрицательной по отношению к элементу с передаточной функцией  $W_{m_2}(p) = \frac{1}{m_2 p^2}$ . В свою очередь, можно привести структурную схему на рис. 2б к виду, как показано на рис. 3.

Передаточная функция отрицательной обратной связи (Рис. 3) представляет собой динамическую реакцию на объект защиты ( $m_2$ ):

$$\begin{aligned} \bar{R}_{m_2} &= \left[ k_3 + \frac{(k_1 + m_1 p^2) \cdot k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} \right] \cdot \bar{y}_2 = \\ &= k_3 \bar{y}_2 + \bar{y}_2 \cdot \frac{(k_1 + m_1 p^2) \cdot k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} \end{aligned} \quad (36)$$

что совпадает с выражением (6).

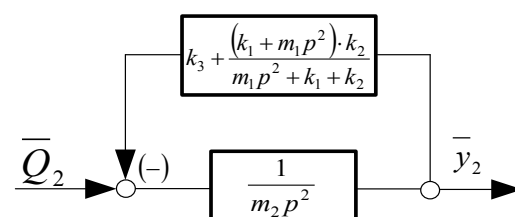


Рис. 3. Структурная схема виброзащитной системы с выделением объекта защиты  $m_2$ .

Динамическая реакция  $\bar{R}_{m_2}$  на объекте защиты имеет две составляющие. Одна из них  $R'm_2 = k_3 y_2$  совпадает с выражением (11). Физический смысл этой составляющей динамической реакции заключается в том, что она формируется взаимодействием объекта защиты  $m_2$  с неподвижной опорой  $B$  (рис. 1а). Вторая часть динамической реакции на объекте защиты определяется выражением (12), которое соответствует приведенной жесткости, упруго-инерционной системы (виброзащитное устройство – ВЗУ) между объектом защиты и неподвижным основанием (или опорой  $A$ ) (Рис.1а). Будем полагать в данном случае, что  $\bar{y}_2 = W_2(p) \cdot \bar{Q}_2$ , тогда:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{m_2} &= W_2(p) \cdot k_3 \cdot \bar{Q}_2 + W_2(p) \cdot \bar{Q}_2 \cdot \frac{(k_1 + m_1 p^2) \cdot k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2} = \\ &= \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2)}{A_0} \bar{Q}_2 + \frac{k_2 \cdot (k_1 + m_1 p^2)}{A_0} \bar{Q}_2. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (37) можно найти передаточную функцию динамической реакции  $\bar{R}_{m_2}$  по внешней силе  $\bar{Q}_2$ :

$$W_{R_{m_2}}(p) = \frac{\bar{R}_{m_2}}{\bar{Q}_2} = \frac{k_3 \cdot (m_1 p^2 + k_1 + k_2) + k_2 \cdot (k_1 + m_1 p^2)}{A_0}, \quad (38)$$

где  $\bar{R}_{m_2} = \bar{R}_B + \bar{R}_{m_2}^*$ ,  $\bar{R}_{m_2}^* = \frac{k_2 \cdot (m_1 p^2 + k_1) \cdot \bar{Q}_2}{A_0}$ .

Выражение (38) полностью совпадает с выражением (15).

1. Структурная схема на рис. 2а дает также возможность найти динамическую реакцию на объекте защиты непосредственно через определение приведенной жесткости обобщенной пружины [5]. В данном случае жесткость такой пружины определится как:

$$k_{np} = k_3 + \frac{(k_1 + m_1 p^2) \cdot k_2}{m_1 p^2 + k_1 + k_2}. \quad (39)$$

Динамическая реакция на объекте защиты имеет вид  $\bar{R}_{m_2} = k_{np} y_2$ , что приводит к выра-

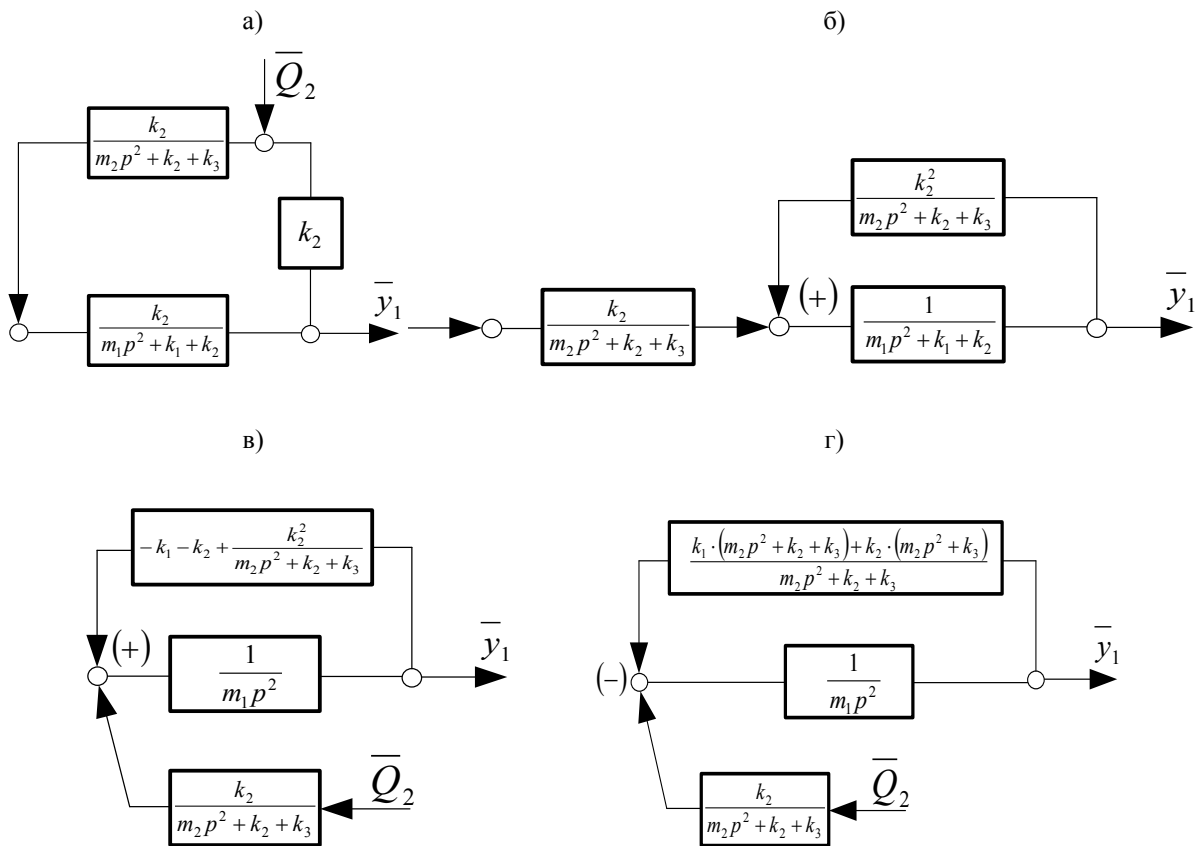


Рис. 4. Последовательное преобразование структурных схем при определении реакций на промежуточной массе.



жению (36). Приведенная жесткость может определяться также как комплексное сопротивление в механических и электрических цепях [8]. Для определения динамических реакций на промежуточном элементе  $m_1$  преобразуем структурную схему на рис. 1в к виду как показано на рис. 4а, б, в, г.

Структурные схемы на рис. 4а, б, в, г связаны между собой соответствующими преобразованиями. На рис. 4а основным элементом является парциальная система, образованная промежуточной массой  $m_1$  и двумя упругими элементами  $k_1$  и  $k_2$ . Оставшаяся часть механической системы ( $m_2, k_2, k_3$ ) образует положительную обратную связь, в которой находится точка приложения силы  $\bar{Q}_2$ , что может быть преобразовано к структурной схеме на рис. 4б. Упругие элементы  $k_1$  и  $k_2$  могут быть из схемы на рис. 4б переведены в обратную положительную связь; при этом коэффициенты жесткости  $k_1$  и  $k_2$  принимаются отрицательными (также как на рис. 2в). Конечным итогом преобразований является переход к структурной схеме на рис. 4г, где в прямой цепи обозначено звено с передаточной функцией  $1/m_1 p^2$ . Положительная обратная связь в этой системе соответствует динамической реакции  $\bar{R}_{m_1}$ . Из рис. 4г следует, что обратная отрицательная связь представляет собой приведенную жесткость  $k'_{np}$ , определяющую искомую динамическую реакцию на промежуточной массе  $m_1$ :

$$k'_{np} = k_1 + \frac{k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}. \quad (40)$$

Передаточная функция системы:

$$\begin{aligned} W_1(p) &= \frac{\bar{y}_1}{\bar{Q}_2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m_1 p^2} \cdot \left[ k_1 \cdot (m_1 p^2 + k_2 + k_3) + k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3) \right]} = \\ &= \frac{k_2}{\left[ k_1 \cdot (m_1 p^2 + k_2 + k_3) + k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3) \right]} = \frac{k_2}{A_0}, \quad (41) \end{aligned}$$

тогда реакция на промежуточной массе  $m_1$

может быть найдена как произведение  $\bar{y}_1$  на  $k'_{np}$ , получим:

$$\bar{R}_{m_1} = \frac{k_1 k_2 \bar{Q}_2}{A_0} + \frac{k_2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} \cdot W_1(p) \cdot \bar{Q}_2, \quad (42)$$

откуда

$$W_{m_1}(p) = \frac{\bar{R}_{m_1}}{\bar{Q}_2} = \frac{k_1 k_2}{A_0} + \frac{k_2^2 \cdot (m_2 p^2 + k_3)}{(m_2 p^2 + k_2 + k_3) \cdot A_0}, \quad (43)$$

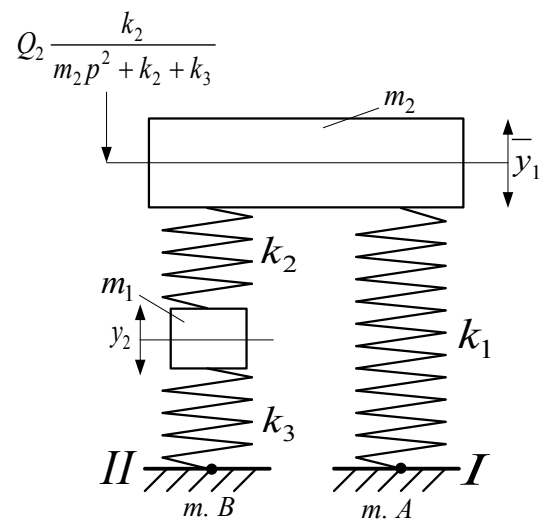
что полностью совпадает с выражениями (27) и (28).

Отметим, что на рис. 4г элемент структурной схемы с передаточной функцией

$$\bar{W}_{Q_2}(p) = \frac{k_2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3} \quad (44)$$

отражает эквивалентный перенос усилия  $Q_2$ , приложенного к объекту защиты  $m_2$  при определении динамической реакции на промежуточной  $m_1$  в новое место – масса  $m_1$ . На рис.5 приведена расчетная и структурная схемы для определения динамической реакции на промежуточной массе  $m_1$ .

а)



б)

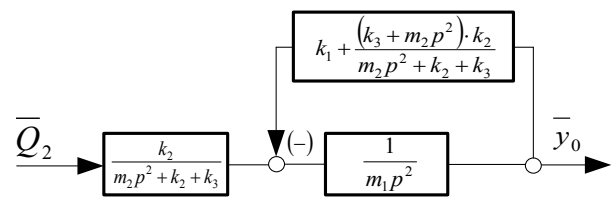


Рис. 5. Расчетная (а) и структурная (б) схемы для определения динамических реакций.

Динамическая реакция по промежуточной массе  $m_1$  может быть определена прямо по расчетной схеме на рис. 5а, для чего необходимо, как и в случае с массой  $m_2$ , воспользоваться приемами определения комплексных сопротивлений, как это делается в электрических (или механических) цепях [7, 8]:

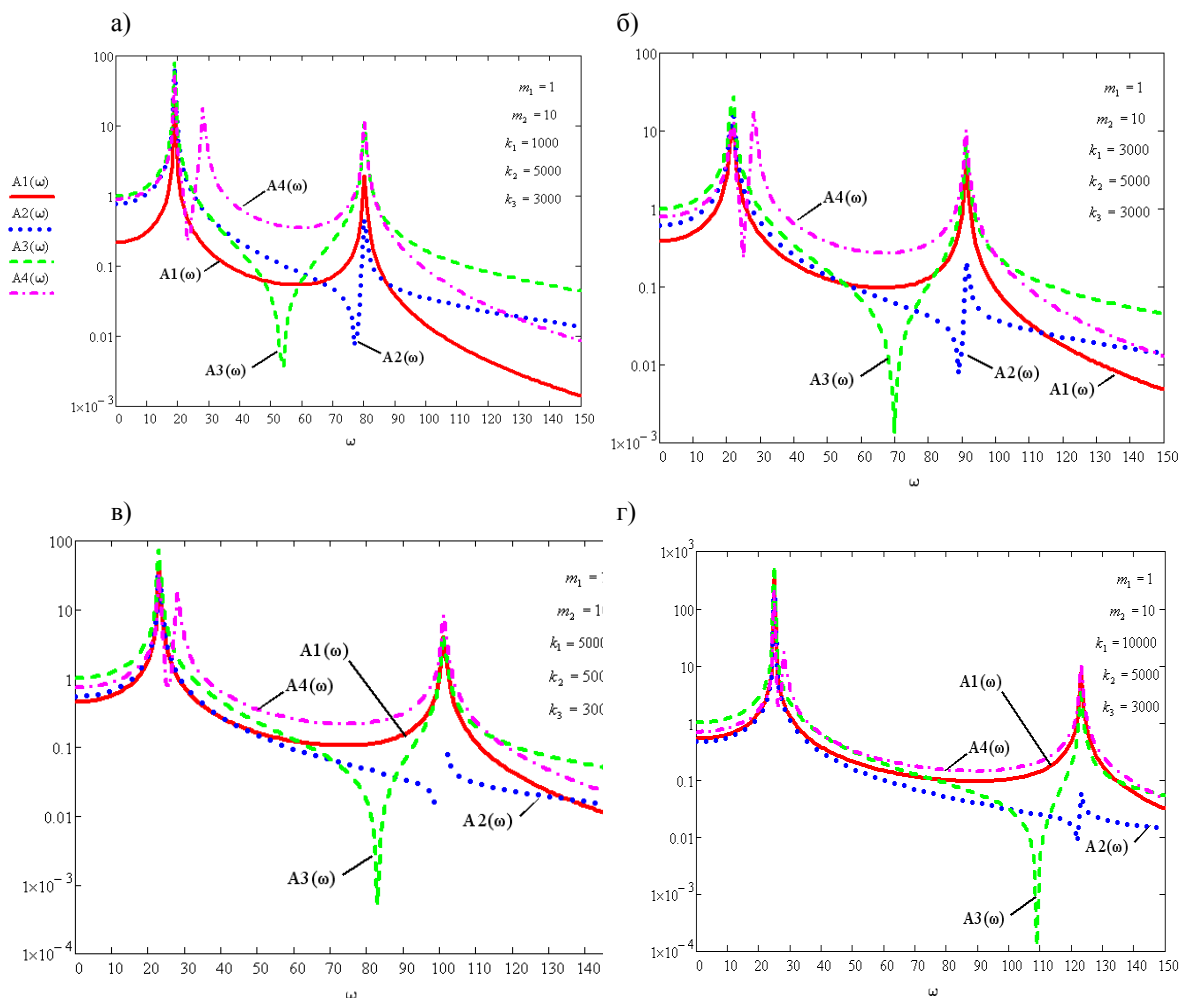
$$k'_{np} = k_1 + \frac{(m_2 p^2 + k_3) \cdot k_2}{m_2 p^2 + k_2 + k_3}, \quad (45)$$

что совпадает с выражением (40).

### V. Сравнительный анализ амплитудно-частотных характеристик

Возможные формы амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) для динамических реакций при силовом внешнем воздействии  $Q_2$  (рис. 1а) представлены на рис. 6а, б, в, г при

различных сочетаниях величин  $m_1$  и  $m_2$ , а также коэффициентах жесткости пружин  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ , которые варьируются в пределах от 1000 Н/м до 10000 Н/м. На всех амплитудно-частотных характеристиках введены обозначения:  $A_1(\omega)$  - соответствует динамической реакции на опорной поверхности I (точка A - опора пружины  $k_1$  на поверхность A) (Рис. 1а);  $A_2(\omega)$  - соответствует динамической реакции в т. B, в которой упругий элемент  $k_3$  опирается на поверхность II (рис. 1а);  $A_3(\omega)$  - соответствует динамической реакции, возникающей у элемента массой  $m_2$  с механической колебательной системой;  $A_4(\omega)$  - соответствует динамической реакции на элементе с массой  $m_1$ .



**Рис. 6.** Амплитудно-частотные характеристики для динамических реакций при различных сочетаниях величин  $m_1$  и  $m_2$ , а также коэффициентах жесткости пружин: а)  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 10$ ,  $k_1 = 1000$ ,  $k_2 = 5000$ ,  $k_3 = 3000$ ; б)  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 10$ ,  $k_1 = 3000$ ,  $k_2 = 5000$ ,  $k_3 = 3000$ ; в)  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 10$ ,  $k_1 = 5000$ ,  $k_2 = 5000$ ,  $k_3 = 3000$ ; г)  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 10$ ,  $k_1 = 10000$ ,  $k_2 = 5000$ ,  $k_3 = 3000$ .

Из анализа АЧХ можно сделать ряд выводов. В частности, на всех рисунках (кривые  $A_1(\omega)$  и  $A_2(\omega)$ ) можно наблюдать, что реакции в т.т.  $A$  и  $B$  различны, эти АЧХ имеют по два резонансных пика. Для  $A_2(\omega)$  возможен режим «динамического гашения», при котором реакция в т.  $B$  может стать равной нулю; частота зависит от жесткостей  $k_1$  и  $k_2$  и изменяется в пределах от 77,46 до 122,74 1/сек.

Отметим, что динамическая реакция в т.  $B$  при силовом возмущении  $Q_2$  совпадает с парциальной частотой колебаний системы  $m_1, k_1, k_2$  (значения параметров приведены на рис. ба, б, в, г).

Амплитудно-частотная характеристика динамической реакции по массе  $m_2$ , обозначенная на рис. ба, б, в, г через  $A_3(\omega)$ , имеет также две резонансные частоты, определяемые из характеристического уравнения (9); кроме того, в системе возможен режим, при котором динамическая реакция становится равной нулю. Частоты таких режимов в зависимости от  $k_1$  могут изменяться в пределах от 53,619 до 108,972 1/сек.

Особенности в АЧХ могут быть отмечены для динамической реакции по массе  $m_1$  (Рис. ба, б, в, г), которая имеет три резонансных пика. Две из них совпадают с частотой резонанса по координатам  $y_1$  и  $y_2$ , что вполне объяснимо. Что касается резонансного пика на частоте  $\omega = \frac{k_2 + k_3}{m_2}$  (это соответствует парциальной частоте системы  $m_2, k_2, k_3$ ), то этот случай соответствует достижению бесконечно больших значений коэффициентом приведенной жесткости. Этот параметр ( $k_{np}$ ) определяется дробно-рациональным выражением и зависит от частоты. Кроме того, динамическая реакция по  $m_1$  имеет режим, при котором динамическая реакция может принимать нулевые значения, как показано на рис. ба, б, в, г (кривая  $A_4(\omega)$ ).

Таким образом, динамические реакции, если их рассматривать как некоторые параметры динамического состояния объекта защиты и виброзащитной системы в целом, имеют в определенных ситуациях свои особенности, что объясняется зависимостью приведенного коэффициента жесткости в виброзащитной системе не только от расположения упругого элемента в системе и его связей, но и от частоты внешнего воздействия, поскольку динамическая реакция является специально созданным параметром, в отличие от координат системы и ее производных.

### Заключение

1. Динамические реакции в виброзащитных системах могут рассматриваться как параметры, характеризующие динамическое состояние также, как и координаты, скорости и ускорения объекта защиты и элементов систем.

2. Динамические реакции могут рассматриваться в представлениях амплитудно-частотных характеристик, при этом часть динамических реакций изменяется по законам изменения координат систем, а часть динамических реакций имеет в формах своего изменения ряд особенностей. Эти особенности проявляются при появлении динамических режимов, при которых приведенная жесткость определенной цепи системы стремится к бесконечности (при отсутствии сил трения).

3. Для определения динамических реакций предложен метод, основанный на выделении объекта защиты (или любого инерционного элемента) в качестве отдельного элемента, относительно которого разрешается уравнение кинематики по выбранной координате. Структурная интерпретация метода основана на выделении объекта защиты (или другого инерционного звена) как звена с передаточной функцией интегрирующего звена второго порядка. Цепь обратной связи для

такого звена представляет собой динамическую реакцию.

4. Доказано, что аналитический и структурный подходы дают одинаковые результаты.

### Литература

1. Вибрации в технике: справочник в 6 т. Т. 6. Защита от вибраций и ударов / под ред. К.В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.

2. Елисеев С.В., Хоменко А.П. Проблема виброзащиты и виброизоляции технических объектов в работах Иркутской школы механиков // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 2005, № 5. – С. 6-26.

3. Harris C.M., Piersol A.G. Shock and vibration Handbook. Fifth Edition. McGraw – Hill. New York, 2002. ISBN 0-07-137081-1.

4. Елисеев С.В., Димов А.В. Формализация описания связей в сложных виброзащитных системах с дополнительными элементами // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 2004, № 3. – С. 10.

5. Хоменко А.П., Елисеев С.В., Ермошенко Ю.В. Методологические основы решения задач динамики. Мехатронные подходы (часть I) // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 2012, № 4. – С. 1-20.

6. Елисеев С.В., Димов А.В. Некоторые особенности структурных представлений двухмассовых колебательных систем // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование, 2006, № 6. – С. 46-54.

7. Белокобыльский С.В. Елисеев С.В., Ситов И.С. Взаимодействие звеньев через массоинерционный элемент в теории механических цепей // Системы. Методы. Технологии, 2012, № 2. – С. 7-15.

8. Елисеев С.В., Московских А.О., Большаков Р.С., Савченко А.А. Возможности интеграции методов теории цепей и теории автоматического управления в задачах динамики

машин // techomag.edu.ru: Наука и образование: электронное научно-техническое издание, 2012, №6. URL. <http://technomag.edu.ru/doc/378699.html> (дата обращения: 10.06.2012).

### References

1. Vibration technology : a guide in 6 vols. Vol. 6. Protection against vibration and shock / ed. K.V. Frolov. – Moscow: Mashinostroenie, 1981. – 456 p.

2. Eliseev S.V., Khomenko A.P. The problem of vibration isolation and vibration technical objects in the works Irkutsk Mechanics School // Modern technologies. System analysis. Modelling, 2005, № 5. – P. 6-26 .

3. Harris C.M., Piersol A.G. Shock and vibration Handbook. Fifth Edition. McGraw – Hill. New York, 2002. ISBN 0-07-137081-1.

4. Eliseev S.V., Dimov A.V. Formalization describing relationships in complex systems, vibration isolation with additional elements // Modern technologies. System analysis. Modelling, 2004, № 3. – P. 10.

5. Khomenko A.P., Eliseev S.V., Ermoshenko Y.V. Methodological basis for solving the problems of dynamics. Mechatronic approaches (Part I) // Modern technologies. System analysis. Modelling, 2012, № 4. – P. 1-20.

6. Eliseev S.V., Dimov A.V. Some features of the structural representations of two-mass vibrating systems // Modern technologies. System analysis. Modelling, 2006, № 6. – P. 46-54.

7. Belokobylskiy S.V., Eliseev S.V., Sitov I.S. Interaction through links mass-inertia element in the theory of mechanical chains // Systems. Methods. Technology, 2012, № 2. – P. 7-15.

8. Eliseev S.V., Moscovskiy A.O., Bolshakov R.S., Savchenko A.A. Integration capabilities methods of circuit theory and the theory of automatic control in the dynamics of machines // techomag.edu.ru: Science and education: e- Science technical publication, 2012, № 6. URL. <http://technomag.edu.ru/doc/378699.html>.

Статья поступила в редакцию 23 апреля 2013 г.

*Ермошенко Юлия Владимировна* – кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования Иркутского государственного университета путей сообщения, г. Иркутск, Россия. E-mail: [ermosh\\_emf@irgups.ru](mailto:ermosh_emf@irgups.ru)

*Большаков Роман Сергеевич* - аспирант НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования Иркутского государственного университета путей сообщения, г. Иркутск, Россия. E-mail: [bolshakov\\_rs@mail.ru](mailto:bolshakov_rs@mail.ru)

*Каимов Евгений Витальевич* – аспирант НОЦ современных технологий, системного анализа и моделирования Иркутского государственного университета путей сообщения, г. Иркутск, Россия. E-mail: [eugen-kaimov@yandex.ru](mailto:eugen-kaimov@yandex.ru)

---

*Ermoshenko Yulia Vladimirovna* – Ph.D., Irkutsk State University of Railway Transport, Irkutsk, Russia. E-mail: [ermosh\\_emf@irgups.ru](mailto:ermosh_emf@irgups.ru)

*Bolshakov Roman Sergeevich* – Graduate student, Irkutsk State University of Railway Transport, Irkutsk, Russia. E-mail: [bolshakov\\_rs@mail.ru](mailto:bolshakov_rs@mail.ru)

*Kaimov Evgeniy Vitaljevich* – Graduate student, Irkutsk State University of Railway Transport, Irkutsk, Russia. E-mail: [eugen-kaimov@yandex.ru](mailto:eugen-kaimov@yandex.ru)